Еркін мүшелі қатарлар

№2790 $1-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$

Лейбниц белгісі:

1) $|1|>\left|\frac{1}{3}\right|>\ldots>\left|\frac{1}{2n-1}\right|\ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{\infty}=0$

Ендеше қатар жинақты қатар. Енді оң таңбалы қатар жинақтылығын тексерейік:

$$1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$$

Интегралдық белгімен тексерейік:

$$\int_1^\infty \frac{1}{2n-1}dn=\frac{1}{2}\ln|2n-1|\ \Big|_1^\infty=\frac{1}{2}(\ln\infty-\ln 1)=\infty$$

Ендеше берілген қатарға сәйкес оң таңбалы қатар жинақсыз; сондықтан қатар шартты жинақты қатар.

№2796 $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-...+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+...$

Лейбниц белгісі:

1) $|1|>\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|>...>\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|...$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\infty}=0$

Ендеше қатар жинақты қатар. Енді оң таңбалы қатар жинақтылығын тексерейік:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$$

Интегралдық белгімен тексерейік:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}dn=2\sqrt{n}\ \Big|_1^{\infty}=2(\infty-1)=\infty$$

Ендеше берілген қатарға сәйкес оң таңбалы қатар жинақсыз; сондықтан қатар шартты жинақты қатар.

№2797 $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}+...$

Лейбниц белгісі: 1) $\left|\frac{1}{2}\right|<|2|<...<\left|\frac{n^3}{2^n}\right|...$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\infty}=0$$

Ендеше қатар жинақсыз қатар.

№2791 $1-\frac{1}{3^3}+\ldots+\left(-1\right)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}+\ldots$

№2806 $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}-\ldots+\frac{x^n}{\sqrt{n}}+\ldots$

Радиусын табайық:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=1$$

Жинақтылық аралығы. $-1<x<1$

Енді $x=-1$ деп аламыз да, сол нүктеден құрылған қатар жинақтылығын тексереміз:

$$-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\ldots+\left(-1\right)^m\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

Лейбниц белгісі:

1) $|1|>\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|>\ldots>\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|\ldots$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\infty}=0$

Ендеше қатар жинақты қатар, сондықтан $x=-1$ болғанда қатар жинақты қатар.

Енді $x=1$ деп аламыз да, сол нүктеден құрылған қатар жинақтылығын тексереміз:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

Интегралдық белгімен тексерейік:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}dn=2\sqrt{n}\ \Big|_1^{\infty}=2(\infty-1)=\infty$$

Ендеше қатар жинақсыз қатар, сондықтан $x=1$ болғанда қатар жинақсыз қатар, сондықтан жинақтылық интервалы: $-1\le x<1$

№2811 $\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{4}+\ldots+\sin\frac{x}{2^n}+\ldots.$

№2843 $y=\frac{1}{x}$ функциясын $x=3$ нүктесінің маңайында Тейлор қатарына жіктеңіз:

$$y\ \Big|_{x=3}=\frac{1}{3}$$

$$y'\ \Big|_{x=3}=-\frac{1}{x^2}\ \Big|_{x=3}=-\frac{1}{9}$$

$$y''\ \Big|_{x=3}=(-x^{-2})'=2x^{-3}\ \Big|_{x=3}=\frac{2}{27}$$

Сонымен Тейлор қатарына жіктелуі:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{\frac{1}{9}}{1!}(x-3)+\frac{\frac{2}{27}}{2!}(x-3)^2+\ldots=\frac{1}{3}-\frac{x-3}{3^2}+\frac{(x-3)^2}{3^3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^{n-1}}{3^n}+\ldots$$

№2935 0,01 дәлдікпен келесі интегралды есептеңіз:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1(1-\frac{x^2}{1\,!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}.+\frac{x^8}{4!}\ldots)dx=\int_0^1 {}_0^1$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1(1-\frac{x^2}{1\,!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}.+\frac{x^8}{4!}\ldots)dx=\int_0^1 dx-\int_0^1 x^2dx+\frac{1}{2!}\int_0^1 x^4dx+\ldots=x\,\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{x^5}{2\cdot 5}\Big|_0^1-$$

$$-\frac{x^7}{6\cdot 7}\Big|_0^1+\frac{x^9}{9\cdot 24}\Big|_0^1+\ldots\approx 1-0{,}3333+0{,}1-0{,}02380+0{,}0046\approx$$

Соңғы мүше көрсетілген дәлдіктен кіші болғандықтан есептелмейді:

$$\approx 1{,}1-0{,}3571\approx 0{,}7429$$

№2935 0,001 дәлдікпен келесі интегралды есептеңіз:

$$\int_{0,1}^{0,2}\frac{e^{-x}}{x^3}dx=\int_{0,1}^{0,2}\frac{1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}\ldots}{x^3}dx=\int_{0,1}^{0,2}x^{-3}dx-\int_{0,1}^{0,2}x^{-2}dx+\int_{0,1}^{0,2}\frac{1}{x\cdot 2!}dx-$$

$$-\frac{1}{3!}\int_{0,1}^{0,2}dx+\ldots=\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_{0,1}^{0,2}+\frac{1}{x}\Big|_{0,1}^{0,2}+\frac{1}{2\,!}\ln x\Big|_{0,1}^{0,2}-\frac{x}{3!}\Big|_{0,1}^{0,2}+\ldots=-\frac{1}{2\cdot 0.2^2}+\frac{1}{2\cdot 0{,}1^2}+$$

$$+\frac{1}{0{,}2}-\frac{1}{0{,}1}+\frac{1}{2}(\ln 0{,}2-\ln 0{,}1)-\frac{0{,}2}{6}+\frac{0{,}1}{6}+\ldots\approx -12{,}5+50+5-10+\frac{1{,}6094}{2}-\frac{2{,}3026}{2}-$$

$$-0{,}0333+0{,}0166+\frac{0.2^2}{2\cdot 4!}-\frac{0{,}1^2}{2\cdot 4!}+\ldots\approx 32{,}5+0{,}8047-1{,}1513-0{,}0167+0{,}0008\approx$$

Соңғы мүше көрсетілген дәлдіктен кіші болғандықтан есептелмейді:

$$\approx 33,3047 - 1,1681 \approx 32,1367$$